Diferencijalne jednačine višeg reda

Doc. dr Nevena Mijajlović

Energetika i automatika, Elektronika, telekomunikacije i računarstvo; ETF

Matematika 3

Opšti oblik diferencijalne jednačine $n-$tog reda:

$$F(t, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0 \tag{1}$$

Normalni oblik diferencijalne jednačine $n-$tog reda:

$$y^{(n)} = f(t, y, y', \ldots, y^{(n-1)}). \tag{2}$$

Pretpostavljamo da je funkcija f definisana u oblasti $\mathbb{G} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}_{t,y,y',\ldots,y^{n-1}}$.

Definicija

Funkcija $y = \varphi(t), t \in \mathbb{I}$ ($\mathbb{I}$ je interval u $\mathbb{R}$) je **rješenje diferencijalne jednačine (2)** ako je
(1) $\varphi \in C^n(\mathbb{I})$;
(2) $(\forall t \in \mathbb{I})(t, \varphi(t), \varphi'(t), \ldots, \varphi^{(n-1)}(t)) \in \mathbb{G}$;
(3) $(\forall t \in \mathbb{I})(\varphi^{(n)} \equiv f(t, \varphi(t), \varphi'(t), \ldots, \varphi^{(n-1)}(t))$.

Košijev zadatak za diferencijalnu jednačinu *n*-tog reda:

Naći rješenje $y = \varphi(t)$ jednačine $y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)})$.
koje zadovoljava uslov
$\varphi(t_0) = y_0, \varphi'(t_0) = y_0^1, \dots, \varphi^{(n-1)}(t_0) = y_0^{n-1}$, gdje je
$(t_0, y_0, y_0^1, \dots, y_0^{n-1}) \in G$.

Uslov

$$\varphi(t_0) = y_0, \varphi'(t_0) = y_0^1, \dots, \varphi^{(n-1)}(t_0) = y_0^{n-1} \tag{3}$$

naziva se Košijev (ili pčetnim) uslovima.

Košijev zadatak (2), (3): naći rješenje diferencijalne jednačine (2) koje zadovoljava početne uslove (3).

Na primjer, za $n = 2$ imamo Košijev zadatak

$$y" = f(t, y, y'),$$

$$y(t_0) = y_0, y'(t_0) = y_0^1$$

Dakle, tražimo onu krivu koja prolazi kroz tačku (t_0, y_0) a pravac njen tangente u toj tački je y_0^1.

Košijev zadatak (2)-(3) ima rješenje ako postoji okolina $O(t_0)$ tačke t_0 takva da postoji rješenje jednačine (2) koje zadovoljava početni uslov (3) definisan u toj okolini.

Rješenje je jedinstveno ako postoji okolina $O(t_0)$ tačke t_0 takva da se sva rješenja jednačine (2) definisana u toj okolini, koja zadovoljavaju uslov (3), poklapaju.

- Oblast $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{G}$ nazivamo oblašću egzistencije i jedinstvenosti rješenja jednačine (2), ako za proizvoljnu tačku $(t_0, y_0, y_0^1, \dots, y_0^{n-1}) \in \mathbb{D}$, Košijev zadatak (2)-(3), ima jedinstveno rješenje.
- Rješenje $y = \varphi(t)$, $t \in \mathbb{I}$ jednačine (2) nazivamo partikularnim (singularnim) ako Košijev zadatak (2), $(t_0, \varphi(t_0), \varphi'(t_0), \dots, \varphi^{n-1}(t_0))$, za svako $t_0 \in \mathbb{I}$ ima (nema) jedinstveno rješenje.
- Grafik rješenja nazivamo integralnom krivom

Teoreme o egzistenciji i jedinstvenosti rješenja jednačine (2)

Peanova teorema

Ako je funkcija f neprekidna u oblasti $\mathbb{G}$ i ako $(t_0, y_0, y_0^1, \ldots, y_0^{n-1}) \in \mathbb{G}$, tada zadatak (2),(3) ima rješenje.

Teorema o egzistenciji i jedinstvenosti rješenja

Neka je $f \in C(\mathbb{G})$, $\frac{\partial f}{\partial y^{(i)}} \in C(\mathbb{G}), i = 0, 1, \ldots n-1$ i $(t_0, y_0, y_0^1, \ldots y_0^{n-1}) \in \mathbb{G}$. Tada Košijev zadatak (2),(3) ima jedinstveno rješenje.

Pikarova teorema

Neka su ispunjeni sljedeći uslovi:

1. $f \in C(\mathbb{G})$;
2. $\exists K > 0 \ \forall (t, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \in \mathbb{G}$, $\forall i \in \{0, \dots, n-1\}$ važi
$$\left| \frac{\partial f}{\partial y^{(i)}} \right| \leq K;$$
3. $(t_0, y_0, y_0^1, \dots, y_0^{n-1}) \in \mathbb{G}$.

Tada Košijev zadatak $(2), (3)$ ima jedinstveno rješenje.

Specijalni slučaj jednačine (2) je linearna jednačina n-tog reda:

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(t)y' + a_n(t)y = b(t), \qquad (4)$$

gdje su funkcije $a_1(t), \ldots, a_n(t), b(t)$ neprekidne na nekom intervalu $\mathbb{I}$.

Teorema

Ako su $a_1, a_2, \ldots, a_n, b \in C(\mathbb{I})$, $t_0 \in \mathbb{I}$ i $(y_0, y_0^1, \ldots, y_0^{n-1})$ proizvoljna tačka prostora $\mathbb{R}^n$, tada Košijev zadatak (4),(3) ima jedinstveno rješenje definisano na intervalu I.

Dakle, oblast egzistencije i jedinstvenosti za jednačinu (4), pod pretpostavkom neprekidnosti funkcija a_i i b, je

$$D = \mathbb{I} \times \mathbb{R}^n.$$

Primjer 1. Primjenom prethodnih teorema naći ćemo oblast egzistencije i jedistvenosti jednačine

$$y'' = \frac{y\sqrt{y'}}{t}.$$

- Funkcija $f(t, y, y') = \frac{y\sqrt{y'}}{t}$ je neprekidna u skupu $A_1 = \{(t, y, y') \in \mathbb{R}^3 : t \neq 0, y \in R, y' \geq 0\}$.
- Slično $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{t}\sqrt{y'}$ je neprekidna u skupu A_1.
- Funkcija $\frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{y}{2t\sqrt{y'}}$ je neprekidna na skupu $A_2 = \{(t, y, y') \in R^3 : t \neq 0, y \in R, y' > 0\}$.

Slijedi da su oblasti (to su otvoreni i povezani skupovi):
$D_1 = \{(t, y, y') \in R^3 : t < 0, y \in R, y' > 0\}$ i
$D_2 = \{(t, y, y') \in R^3 : t > 0, y \in R, y' > 0\}$.

Primjer 2. Odredićemo oblast egzistencije i jedinstvenosti rješenja jednačine $(t-3)y'' - ty' + \sqrt{t}y + t - 1 = 0$. Odgovor na postavljeno pitanje daćemo na osnovu Teoreme 4, koja se odnosi na linearne diferencijalne jednačine. Prvo, napišimo ovu jednačnu u obliku (4):

$$y'' - \frac{t}{t-3}y' + \frac{\sqrt{t}}{t-3}y = \frac{1-t}{t-3}.$$

Funkcije $a_1(t) = \frac{t}{t-3}, b(t) = \frac{1-t}{t-3}$ su definisane i neprekidne u svakoj tački sa izuzetkom tačke $t = 3$, dok je funkcija $a_2(t) = \frac{\sqrt{t}}{t-3}$ definisana (i nerekidna) za $t \geq 0$ i $t \neq 3$. Slijedi da je oblasti egzistencije i jedinstvenosti rješenja ove jednačine

$$D_1 = (0,3) \times \mathbb{R}^2 \quad \text{i} \quad D_2 = (3,+\infty) \times \mathbb{R}^2.$$

Primjer 3. Pretpostavimo da su $\varphi_1(t) = t$ i $\varphi_2(t) = \sin t$ rješenja jednačine (2), pri čemu su zadovoljeni uslovi iz teoreme o egzistenciji i jedinstvensti rješenja za $\mathbb{I} = \mathbb{R}$. Odrediti najmanji mogući red te jednačine.

Primijetimo da je $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 0$, $\varphi_1'(0) = \varphi_2'(0) = 1$, $\varphi_1''(0) = \varphi_2''(0) = 0$. Slijedi (Teorema 2) da red te jednačne ne može biti manji od 4. S druge strane, imamo da su $\varphi_1(t) = t$, $\varphi_2(t) = \sin t$ rješenja jednačine $y^{(4)} = -y''$. Dakle,najmanji mogući red te jednačine jednak je 4. Pri tome za svako $n \geq 4$ $\varphi_1(t) = t$ i $\varphi_2(t) = \sin t$ rješenja jednačine $y^{(n)} = -y^{(n-2)}$.

Napomena. Primijetimo da su $\varphi_1(t) = t$, $\varphi_2(t) = \sin t$ rješenja jednačine $(t\cos t - \sin t)y'' + (t\sin t)y' - (\sin t)y = 0$. Da li je ovaj primjer u kontradikciji sa prethodnim zaključkom?

U nekim (jednostavnijim) slučajevima jednačinu

$$F(t, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0 \tag{1}$$

možemo riješiti po $y^{(n)}$ i tako dobiti jednu ili više jednačina oblika

$$y^{(n)} = f(t, y, y', \ldots, y^{(n-1)}).$$

Pretpostavimo da je funkcija F definisana u oblasti

$$V \subseteq \mathbb{R}^{n+2}_{t,y,y',\ldots,y^{(n-1)}}.$$

Definicija

Funkciju $y = \varphi(t) \in C^n(\mathbb{I})$ nazivamo rješenjem jednačine (1) ako su ispunjeni sljedeći uslovi:

1) $(\forall t \in \mathbb{I})\ (t, \varphi(t), \varphi'(t), \ldots, \varphi^{(n)}(t)) \in V$;
2) $(\forall t \in I)\ F(t, \varphi(t), \varphi'(t), \ldots, \varphi^{(n)}(t)) \equiv 0$.

Odgovarajući početni uslovi, koji zajedno sa jednačinom (1) čine Košijev zadatak, glase

$$y(t_0) = y_0, y'(t_0) = y_0^1, \ldots, y^{(n-1)}(t_0) = y_0^{n-1}.$$

Neka je $O(M_0)$ okolina tačke $M_0 \in V$, u kojoj sy funkcije F i $\frac{\partial F}{\partial y^{(i)}}$, $i = 0, 1, \ldots, n$ neprekidne, pri čemu je $F(M_0) = 0$ i

$$\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}} \Big|_{M_0} \neq 0.$$

Tada potoji jedinstveno rješenje $y = \varphi(t)$ jednačine $F(t, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$ koje zadovoljava početne uslove $\varphi^{(i)}(t_0) = y_0^i$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$.

Primjer 4. Jednačina $2y = t^2y''$ ima dva rješenja ($y = 0$ i $y = t$) koja zadovoljavaju početne uslove: $y(0) = y'(0) = 0$, koja se pri tome ne poklapaju ni u jednoj okolini tačke $t = 0$. Kako to objasniti s obzirom na prethodnu teoremu?

Odgovor. Razog se sastoji u tome što ovu jednačinu nije moguće riješiti po y'' u okolini tačke $t = 0$.

I Tip:

Jednačine oblika

$$y^{(n)} = f(t), \quad f \in C(\mathbb{I}), \ 0 < k < n;$$

Saglasno teoremi 4, oblast egzistencije i jedinstvenosti rješenja ove jednačine je $\mathbb{G} = \mathbb{I} \times \mathbb{R}^n$.
Integraljeći jednačinu (5) n puta dobijamo rješenje u oblasti $\mathbb{G}$:

$$\frac{dy^{(n-1)}}{dt} = f(t) \Longrightarrow dy^{(n-1)} = f(t)dt \Longrightarrow$$

$$y^{(n-1)} = \int f(t)dt + C_1 \Rightarrow \frac{dy^{(n-2)}}{dt} = \int f(t)dt + C_1 \Longrightarrow$$

$$dy^{(n-2)} = \int \left(\int f(t)dt \right) dt + C_1 t + C_2,$$

Postupak ponavljamo dok ne dobijemo formulu *opšteg rješenja ove diferencijalne jednačine*

$$y = \underbrace{\int \dots \int}_{n} f(t) \underbrace{dt \dots dt}_{n} + C_1 t^{n-1} + C_2 t^{n-2} + \dots + C_n,$$

gdje su $C_1, \dots, C_n$ proizvoljne konstante.
Rješenje $y = \varphi(t)$ koje zadovoljava početne uslove $\varphi^{(i)}(t_0) = y_0^i$, $i = 0, 1, \dots, n-1$, $(t_0, y_0, \dots, y_0^{n-1}) \in \mathbb{G}$ je funkcija

$$\varphi(t) = \underbrace{\int_{t_0}^{t} \dots \int_{t_0}^{t}}_{n} f(\xi) \underbrace{d\xi \dots d\xi}_{n} + C_1 t^{n-1} + \frac{y_0^{n-1}}{(n-1)!}(t-t_0)^{n-1} + \dots + y_0$$

$$= \frac{1}{(1-n)!} \int_{t_0}^{t} f(\xi)(t-\xi)^{n-1} d\xi + \sum_{i=1}^{n} \frac{y_0^{n-1}}{(n-1)!}(t-t_0)^{n-i}$$

II Tip:

Jednačine oblika

$$F(t, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0,$$

dopuštaju snižabvanje reda za k. Smjena $u = y^{(k)}$, tj. $u(t) = y^{(k)}(t)$. Tada je

$$u' = y^{(k+1)}, \dots, u^{(n-k)} = y^{(n)},$$

pa se data jednačina svodi na

$$F(t, u, u', \dots, u^{(n-k)}) = 0.$$

III Tip:

Jednačine oblika

$$F(y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

Primijetimo, u jednačini se ne pojavljuje nezavisno prmjenjiiva t. Ova jednačina dopušta snižvanje reda jednačine za 1. Uvodimo smjenu $u = y'$, tj. $y' = u$. Primijetimo da u zavisi od y, tj. $u = u(y)$. Diferencirajući jednakost $y' = u$ po promjenljivoj t dobijamo

$$y'' = \frac{dy'}{dt} = \frac{du}{dt} = \frac{du}{dy}\frac{dy}{dt} = u'y' = u'u$$

Diferencirajući dalje, dobijamo

$$\begin{aligned} y''' &= \frac{dy''}{dt} = \frac{d(uu')}{dt} = \frac{d(uu')}{dy} \cdot \frac{d(y)}{dt} = \\ &= \left(\frac{du}{dy} \cdot u' + u \cdot \frac{du'}{du}\right) = (u'u' + uu'')u. \end{aligned}$$

Produžavajući ovaj postupak, dobićemo i

$$y^{(n)} = u \cdot g(u, u' \ldots, u^{(n-1)}).$$

Zamjenom u datu jednačinu dobijamo konačno

$$F(y, u, uu', \ldots, u \cdot g(u, u', \ldots, u^{(n-1)})) = 0,$$

tj. jedančinu oblika

$$\tilde{F}(y, u, u', \ldots . u^{(n-1)}) = 0,$$

koja je reda $(n-1)$. Rješavajući ovu jednačinu dobijam $u(y)$, tj. dobijamo jednačinu prvog reda, $y' = u(y)$, čijim rješavanjem konačno dobijamo rješenje date jednačine.

IV Tip:

Jednačine oblika

$$F(t, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0,$$

gdje je $F(t, y, y', \ldots, y^{(n)})$ totalni diferencijal, po t, neke funkcije.

Tada je

$$F(t, y, y', \ldots, y^{(n)}) = \frac{d}{dt} G(t, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$$

Slijedi da datu jednačinu tada možemo napisati u obliku

$$\frac{d}{dt} G(t, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) = 0,$$

odnosno

$$G(t, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) = C_1,$$

što je jednačina reda $(n-1)$.

V Tip:

To su jednačine oblika

$$F(t, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

pri čemu je funkcija F homogena po promjenljivima $y, y', \dots, y^{(n)}$.

Red ove jednačine može se sniziti za 1, na sljedeći način: Smjena $y' = yu$, gdje je $u = u(t)$ nova nepoznata funkcija. Tada je

$$y'' = \frac{dy'}{dt} = \frac{d(yu)}{dt} = \frac{dy}{dt} \cdot u + \frac{du}{dt} \cdot y = y'u + u'y = y(u^2 + u').$$

$$y''' = \frac{dy''}{dt} = \frac{d)y(u^2 + u'))}{dt} = \frac{dy}{dt}(y^2 + u') + y\frac{d(u^2 + u')}{dt} =$$

$$= y'(y^2+u')+y(2uu'+u") = y(u^3+u'u+2uu'+u") = y(u^3+3uu'+u")$$

Produžavajući ovaj postupak, dobijamo:

$$y^{(n)} = y \cdot g(u, u', \ldots, u^{(n-1)}).$$

Uvrstimo u početnu jednačinu i dobijamo

$$F(t, y, yu, y(u^2 + u'), \ldots, yg(u, u', \ldots, u^{(n-1)})) = 0.$$

Koristeći uslov homogenosti funkcije F imamo

$$y^m F(t, 1, u, (u^2 + u'), \ldots, g(u, u', \ldots, u^{(n-1)})) = 0,$$

odnosno jednačinu oblika

$$\tilde{F}(t, u, u', \ldots, u^{(n-1)}) = 0,$$

čiji je red za jedan manji od reda početne jednačine.

Riješiti DJ:

1. $y'' = \frac{\ln t}{t}$
2. $y''' = 2(y'' - 1)\cot t$
3. $y'y''' - 2y''^2 = 0$
4. $yy'' + y'^2 = 1$
5. $tyy'' - ty'^2 = yy'$
6. $yy''' + 3y'y" = 0$
6. $tyy'' - ty'^2 = 2yy'$
7. $y(ty'' + y') = t(1-t)y'^2$

Primjer 5. Riješićemo jednačinu $yy'' + y'^2 = 1$.
Prvo, možemo reći da je to jednačina III tipa. Ali možemo takodje uočiti da je

$$yy'' + y'^2 = \frac{d(yy')}{dt},$$

odakle slijedi da datu jednačinu možemo pisati u obliku

$$\frac{d(yy')}{dt} = 1 \implies yy' = t + C_1.$$

Dobili smo jednačinu prvog reda sa razdvojenim promjenljivima, čije je rješenje (pa dakle ii rješenja date jednačine)

$$\frac{y^2}{2} = \frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2.$$

Primjer 6. Rješavamo jednačinu

$$yy''' + 3y'y'' = 0.$$

Uočimo da je

$$yy''' + y'^2 = (yy'')' + (y')^2)' = (y'^2 + yy'')',$$

odakle slijedi da početnu jednačinu možemo pisati u obliku

$$\frac{d}{dt}(y'^2 + yy'') = 0,$$

odnosno

$$y'^2 + yy'' = C_1,$$

koju dalje možemo rjeäti kao jednačinu III tipa ili kao jednačiinu IV tipa, jer za funkciju $F(y, y', y'') = y'^2 + yy''$ važi

$$F(\lambda y, \lambda y', \lambda y'') = (\lambda y')^2 + \lambda y \lambda y'' = \lambda^2 (y'^2 + yy'') = \lambda^2 F(y, y', y''),$$

pa je dakle funkcija F homogena po promjenljivima y, y', y'', sa stepenom homogenosti 2.